Conjuntos II

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Introducción

- Se pueden combinar dos o más conjuntos de muchas formas diferentes.

- Por ejemplo, comenzando con el conjunto de especializaciones en matemáticas en su escuela y el conjunto de especializaciones en ciencias de la computación en su escuela, podemos formar:

Introducción

- Por ejemplo, comenzando con el conjunto de especializaciones en matemáticas en su escuela y el conjunto de especializaciones en ciencias de la computación en su escuela, podemos formar:
    - el conjunto de estudiantes que se especializan en matemáticas o en ciencias de la computación,

Introducción

- Por ejemplo, comenzando con el conjunto de especializaciones en matemáticas en su escuela y el conjunto de especializaciones en ciencias de la computación en su escuela, podemos formar:
  - el conjunto de estudiantes que tienen especializaciones conjuntas en matemáticas y ciencias de la computación,

Introducción

- Por ejemplo, comenzando con el conjunto de especializaciones en matemáticas en su escuela y el conjunto de especializaciones en ciencias de la computación en su escuela, podemos formar:
    - el conjunto de todos los alumnos que no se especializan en matemáticas,

Introducción

- Por ejemplo, comenzando con el conjunto de especializaciones en matemáticas en su escuela y el conjunto de especializaciones en ciencias de la computación en su escuela, podemos formar:

    - etc.

Definición 1

Sean A y B conjuntos. La *unión* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o en B, o en ambos.

Unión de conjuntos I

Definición 1

Sean A y B conjuntos. La *unión* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o en B, o en ambos.

Un elemento x pertenece a la unión de los conjuntos A y B si y sólo si x pertenece a A o x pertenece a B. Esto nos dice que

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

El diagrama de Venn que se muestra en la Figura 1 representa la unión de dos conjuntos A y B. El área que representa $A \cup B$ es el área sombreada dentro del círculo que representa a A o del círculo que representa a B.

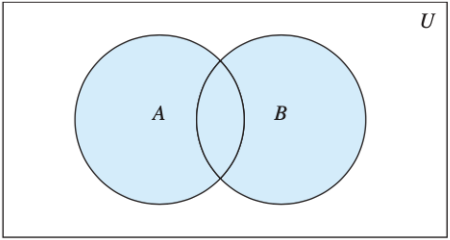

Figura 1: Diagrama de Venn de la unión de A yB.

Ejemplos de unión de conjuntos

Ejemplo 1

La unión de los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$; es decir, $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$. $\square$

Ejemplos de unión de conjuntos

Ejemplo 2

La unión del conjunto de todas las especialidades en ciencias de la computación de su universidad y el conjunto de todas las especializaciones en matemáticas de su universidad es el conjunto de estudiantes de su universidad que se especializan en matemáticas o en ciencias de la computación (o en ambas). $\square$

Intersección de conjuntos I

Definición 2

Sean A y B conjuntos. La *intersección* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos tanto en A como en B.

Definición 2

Sean A y B conjuntos. La *intersección* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos tanto en A como en B.

Un elemento x pertenece a la intersección de los conjuntos A y B si y sólo si x pertenece a A y x pertenece a B. Esto nos dice que

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

El diagrama de Venn que se muestra en la Figura 2 representa la intersección de dos conjuntos A y B. El área sombreada que está dentro de ambos círculos que representan a los conjuntos A y B es el área que representa la intersección de A y B.

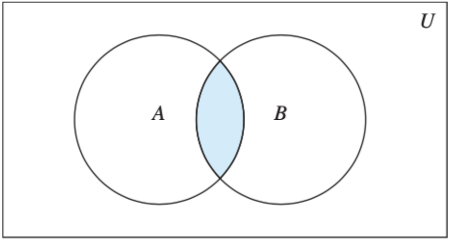

Figura 2: Diagrama de Venn de la intersección de A y B.

Ejemplos de intersección de conjuntos

Ejemplo 3

La intersección de los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{1, 3\}$; es decir, $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$. $\square$

Ejemplos de intersección de conjuntos

Ejemplo 4

La intersección del conjunto de todas las especializaciones en ciencias de la computación de su escuela y el conjunto de todas las especializaciones en matemáticas es el conjunto de todos los estudiantes que tienen especializaciones conjuntas en matemáticas y ciencias de la computación.

□

Conjuntos disjuntos

Definición 3

Dos conjuntos se denominan *disjuntos* si su intersección es el conjunto vacío.

Conjuntos disjuntos

Ejemplo 5

Sea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Como $A \cap B = \emptyset$, A y B son disjuntos. $\square$

Cardinalidad de la unión de conjuntos I

- A menudo nos interesa encontrar la cardinalidad de una unión de dos conjuntos finitos A y B.

- Observe que $|A| + |B|$ cuenta cada elemento que está en A pero no en B o en B pero no en A exactamente una vez, y cada elemento que está en A y B exactamente dos veces.

Cardinalidad de la unión de conjuntos I

- Por lo tanto, si el número de elementos que están tanto en A como en B se resta de $|A| + |B|$, los elementos de $A \cap B$ se contarán sólo una vez.

Cardinalidad de la unión de conjuntos I

- Por lo tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- La generalización de este resultado a uniones de un número arbitrario de conjuntos se denomina **principio de inclusión-exclusión**.

- El principio de inclusión-exclusión es una técnica importante utilizada en la enumeración.

Cardinalidad de la unión de conjuntos I

- Discutiremos este principio y otras técnicas de conteo en detalle más adelante.

Diferencia de conjuntos I

Definición 4

Sean A y B conjuntos. La *diferencia* de A y B, denotada por $A - B$, es el conjunto que contiene los elementos que están en A pero no en B. La diferencia de A y B también se llama *complemento de* B *con respecto de* A.

Diferencia de conjuntos I

Definición 4

Sean A y B conjuntos. La *diferencia* de A y B, denotada por $A - B$, es el conjunto que contiene los elementos que están en A pero no en B. La diferencia de A y B también se llama *complemento de B con respecto de A*.

Un elemento x pertenece a la diferencia de A y B si y sólo si $x \in A$ y $x \notin B$. Esto nos dice que

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Diferencia de conjuntos II

El diagrama de Venn que se muestra en la Figura 3 representa la diferencia de los conjuntos A y B. El área sombreada dentro del círculo que representa a A y fuera del círculo que representa a B es el área que representa a $A - B$.

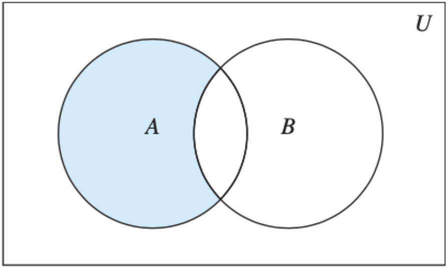

Figura 3: Diagrama de Venn de la diferencia de A y B.

Ejemplo de diferencia de conjuntos

Ejemplo 6

La diferencia de $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es el conjunto $\{5\}$; es decir, $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$. Esto es diferente de la diferencia de $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 3, 5\}$, que es el conjunto $\{2\}$. $\square$

Complemento de un conjunto I

Una vez que se ha especificado un conjunto universal U, se puede definir el **complemento** de un conjunto.

Complemento de un conjunto I

Definición 5

Sea U el conjunto universal. El *complemento* del conjunto A, denotado por $\overline{A}$, es el complemento de A con respecto a U. Por lo tanto, el complemento del conjunto A es $U - A$.

Complemento de un conjunto I

Observación 1

La definición del complemento de A depende de un conjunto universal particular U. Esta definición tiene sentido para cualquier superconjunto U de A. Si queremos identificar el conjunto universal U, escribiremos "el complemento de A con respecto al conjunto U".

Un elemento pertenece a $\overline{A}$ si y sólo si $x \notin A$. Esto nos dice que $\overline{A} = \{x \in U | x \notin A\}$. En la Figura 4, el área sombreada fuera del círculo que representa a A es el área que representa a $\overline{A}$.

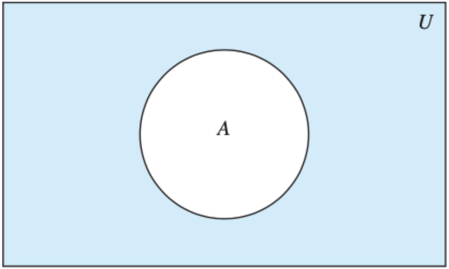

Figura 4: Diagrama de Venn del complemento de A.

Ejemplos de complemento de un conjunto

Ejemplo 7

Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ (donde el conjunto universal es el conjunto de letras del alfabeto Inglés).
Entonces $\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$. $\square$

Ejemplos de complemento de un conjunto

Ejemplo 8

Sea A el conjunto de enteros positivos mayores que 10 (donde el conjunto universal es el conjunto de todos los enteros positivos). Entonces $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. □

Identidades de conjuntos I

- La Tabla 1 enumera las identidades más importantes de uniones, intersecciones y complementos de conjuntos.

Identidades de conjuntos I

- Aquí probaremos varias de estas identidades, usando tres métodos diferentes.

Identidades de conjuntos I

- Estos métodos se presentan para ilustrar que a menudo hay muchos enfoques diferentes para la solución de un problema.

Identidades de conjuntos I

- El lector debe notar la similitud entre estas identidades de conjuntos y las equivalencias lógicas discutidas en su curso de Matemáticas Discretas.

- De hecho, las identidades de conjuntos dadas se pueden probar directamente a partir de las equivalencias lógicas correspondientes.

Identidades de conjuntos I

- Además, ambos son casos especiales de identidades que son válidas para el álgebra de Boole.

Identidades de conjuntos II

Identity	*Name*
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

Tabla 1: Identidades de conjuntos.

Identidades de conjuntos III

- Una forma de demostrar que dos conjuntos son iguales es mostrar que cada uno es un subconjunto del otro.

Identidades de conjuntos III

- Recuerde que para mostrar que un conjunto es un subconjunto de un segundo conjunto, podemos mostrar que si un elemento pertenece al primer conjunto, entonces también debe pertenecer al segundo conjunto.

Identidades de conjuntos III

- Generalmente usamos una prueba directa para hacer esto.

Identidades de conjuntos III

- Ilustramos este tipo de prueba estableciendo la primera de las leyes de De Morgan.

Ejemplo 9 demostración de identidades I

Ejemplo 9

Pruebe que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución:

- Demostraremos que los dos conjuntos $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$ son iguales mostrando que cada conjunto es un subconjunto del otro.

Ejemplo 9 demostración de identidades I

Ejemplo 9

Pruebe que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución:

- Demostraremos que los dos conjuntos $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$ son iguales mostrando que cada conjunto es un subconjunto del otro.
- Primero, mostraremos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A \cap B}$, entonces también debe estar en $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades I

Ejemplo 9

Pruebe que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución:

- Demostraremos que los dos conjuntos $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$ son iguales mostrando que cada conjunto es un subconjunto del otro.
- Primero, mostraremos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A \cap B}$, entonces también debe estar en $\overline{A} \cup \overline{B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A \cap B}$. Por la definición de complemento, $x \notin A \cap B$.

Ejemplo 9

Pruebe que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución:

- Demostraremos que los dos conjuntos $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$ son iguales mostrando que cada conjunto es un subconjunto del otro.
- Primero, mostraremos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A \cap B}$, entonces también debe estar en $\overline{A} \cup \overline{B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A \cap B}$. Por la definición de complemento, $x \notin A \cap B$.
- Usando la definición de intersección, vemos que la proposición $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadera.

Ejemplo 9 demostración de identidades II

- Al aplicar la ley de De Morgan a las proposiciones, vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$.

Ejemplo 9 demostración de identidades II

- Al aplicar la ley de De Morgan a las proposiciones, vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$.
- Usando la definición de negación de proposiciones, tenemos $x \notin A$ o $x \notin B$.

Ejemplo 9 demostración de identidades II

- Al aplicar la ley de De Morgan a las proposiciones, vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$.
- Usando la definición de negación de proposiciones, tenemos $x \notin A$ o $x \notin B$.
- Usando la definición del complemento de un conjunto, vemos que esto implica que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades II

- Al aplicar la ley de De Morgan a las proposiciones, vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$.
- Usando la definición de negación de proposiciones, tenemos $x \notin A$ o $x \notin B$.
- Usando la definición del complemento de un conjunto, vemos que esto implica que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.
- En consecuencia, por la definición de unión, vemos que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades II

- Al aplicar la ley de De Morgan a las proposiciones, vemos que $\neg(x \in A)$ o $\neg(x \in B)$.
- Usando la definición de negación de proposiciones, tenemos $x \notin A$ o $x \notin B$.
- Usando la definición del complemento de un conjunto, vemos que esto implica que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.
- En consecuencia, por la definición de unión, vemos que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Así hemos demostrado que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A} \cup \overline{B}$, entonces también debe estar en $\overline{A \cap B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A} \cup \overline{B}$, entonces también debe estar en $\overline{A \cap B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A} \cup \overline{B}$, entonces también debe estar en $\overline{A \cap B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Según la definición de unión, sabemos que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A} \cup \overline{B}$, entonces también debe estar en $\overline{A \cap B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Según la definición de unión, sabemos que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.
- Usando la definición de complemento, vemos que $x \notin A$ o $x \notin B$.

Ejemplo 9 demostración de identidades III

- A continuación, mostraremos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Hacemos esto mostrando que si x está en $\overline{A} \cup \overline{B}$, entonces también debe estar en $\overline{A \cap B}$.
- Ahora suponga que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Según la definición de unión, sabemos que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.
- Usando la definición de complemento, vemos que $x \notin A$ o $x \notin B$.
- En consecuencia, la proposición $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ es verdadera.

- Según la ley de De Morgan para las proposiciones, concluimos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadero.

Ejemplo 9 demostración de identidades IV

- Según la ley de De Morgan para las proposiciones, concluimos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadero.
- Por la definición de intersección, se sigue que $\neg(x \in A \cap B)$.

Ejemplo 9 demostración de identidades IV

- Según la ley de De Morgan para las proposiciones, concluimos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadero.
- Por la definición de intersección, se sigue que $\neg(x \in A \cap B)$.
- Ahora usamos la definición de complemento para concluir que $x \in \overline{A \cap B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades IV

- Según la ley de De Morgan para las proposiciones, concluimos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadero.
- Por la definición de intersección, se sigue que $\neg(x \in A \cap B)$.
- Ahora usamos la definición de complemento para concluir que $x \in \overline{A \cap B}$.
- Esto muestra que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Ejemplo 9 demostración de identidades IV

- Según la ley de De Morgan para las proposiciones, concluimos que $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ es verdadero.
- Por la definición de intersección, se sigue que $\neg(x \in A \cap B)$.
- Ahora usamos la definición de complemento para concluir que $x \in \overline{A \cap B}$.
- Esto muestra que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
- Como hemos demostrado que cada conjunto es un subconjunto del otro, los dos conjuntos son iguales y se demuestra la identidad. $\square$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\overline{A \cap B} =$$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$\overline{A \cap B} = \{x | x \notin A \cap B\}$ por definición de complemento

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\ &= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \end{aligned}$$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\ &= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\ &= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \end{aligned}$$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \land x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \lor \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} && \text{por definición del símbolo no pertenece}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{por definición de complemento}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10 demostración de identidades

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{por definición de unión}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{por definición de unión} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{por notación de constructor de conjuntos}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10

Utilice la notación de constructor de conjuntos y las equivalencias lógicas para establecer la primera ley de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solución: Podemos probar esta identidad con los siguientes pasos.

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{por definición de intersección} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{por De Demorgan en prop. lógicas} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} && \text{por definición del símbolo no pertenece} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{por definición de complemento} \\
&= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{por definición de unión} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{por notación de constructor de conjuntos}
\end{aligned}
$$

Tenga en cuenta que, además de las definiciones de complemento, unión, membresía de conjunto y notación de constructor de conjuntos, esta demostración utiliza la segunda ley de De Morgan para equivalencias lógicas. $\square$

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y $(x \in B$ o $x \in C)$ (o ambos).

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y $(x \in B$ o $x \in C)$ (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$) (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.
- Por la ley distributiva para la conjunción sobre la disyunción, se deduce que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$.

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y $(x \in B$ o $x \in C)$ (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.
- Por la ley distributiva para la conjunción sobre la disyunción, se deduce que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$.
- Concluimos que $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in A$ y $x \in C$.

Ejemplo 11 demostración de identidades I

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$) (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.
- Por la ley distributiva para la conjunción sobre la disyunción, se deduce que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$.
- Concluimos que $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in A$ y $x \in C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$) (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.
- Por la ley distributiva para la conjunción sobre la disyunción, se deduce que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$.
- Concluimos que $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in A$ y $x \in C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Usando la definición de unión, tenemos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejemplo 11

Demuestre la segunda ley distributiva de la Tabla 1, que establece que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C.

Solución: Demostraremos esta identidad mostrando que cada lado es un subconjunto del otro lado.

- Suponga que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Por la definición de unión, se deduce que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$) (o ambos).
- En otras palabras, sabemos que la proposición compuesta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ es verdadera.
- Por la ley distributiva para la conjunción sobre la disyunción, se deduce que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$.
- Concluimos que $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in A$ y $x \in C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Usando la definición de unión, tenemos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Concluimos que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$.
- De esto vemos que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$).

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$.
- De esto vemos que $x \in A$ y $(x \in B$ o $x \in C)$.
- En consecuencia, por la definición de unión vemos que $x \in A$ y $x \in B \cup C$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$.
- De esto vemos que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$).
- En consecuencia, por la definición de unión vemos que $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Además, por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Ejemplo 11 demostración de identidades II

- Ahora suponga que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Entonces, por la definición de unión, $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Por la definición de intersección, se sigue que $x \in A$ y $x \in B$ o que $x \in A$ y $x \in C$.
- De esto vemos que $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$).
- En consecuencia, por la definición de unión vemos que $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Además, por la definición de intersección, se sigue que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Concluimos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Esto completa la prueba de la identidad. $\square$

Identidades de conjuntos IV

- Las identidades de conjuntos también se pueden probar mediante **tablas de pertenencia**.

Identidades de conjuntos IV

- Las identidades de conjuntos también se pueden probar mediante **tablas de pertenencia**.
- Consideramos cada combinación de los conjuntos atómicos (es decir, los conjuntos originales utilizados para producir los conjuntos en cada lado) a los que un elemento puede pertenecer y verificamos que los elementos en las mismas combinaciones de conjuntos pertenecen a ambos conjuntos en la identidad.

Identidades de conjuntos IV

- Las identidades de conjuntos también se pueden probar mediante **tablas de pertenencia**.
- Consideramos cada combinación de los conjuntos atómicos (es decir, los conjuntos originales utilizados para producir los conjuntos en cada lado) a los que un elemento puede pertenecer y verificamos que los elementos en las mismas combinaciones de conjuntos pertenecen a ambos conjuntos en la identidad.
- Para indicar que un elemento está en un conjunto, se usa un 1; para indicar que un elemento no está en un conjunto, se usa un 0.

Identidades de conjuntos IV

- Las identidades de conjuntos también se pueden probar mediante **tablas de pertenencia**.
- Consideramos cada combinación de los conjuntos atómicos (es decir, los conjuntos originales utilizados para producir los conjuntos en cada lado) a los que un elemento puede pertenecer y verificamos que los elementos en las mismas combinaciones de conjuntos pertenecen a ambos conjuntos en la identidad.
- Para indicar que un elemento está en un conjunto, se usa un 1; para indicar que un elemento no está en un conjunto, se usa un 0.
- Note la similitud entre las tablas de membresía y las tablas de verdad.

Ejemplo 12 demostración de identidades I

Ejemplo 12

Utilice una tabla de pertenencia para mostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejemplo 12

Utilice una tabla de pertenencia para mostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solución: La tabla de pertenencia para estas combinaciones de conjuntos se muestra en la Tabla 2. Esta tabla tiene ocho filas. Debido a que las columnas para $A \cap (B \cup C)$ y $((A \cap B) \cup (A \cap C))$ son las mismas, la identidad es válida.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 2: Tabla de pertenencia para la propiedad distributiva.

Identidades de conjuntos V

- Una vez que hemos probado las identidades establecidas, podemos usarlas para probar nuevas identidades.

Identidades de conjuntos V

- En particular, podemos aplicar una serie de identidades, una en cada paso, para llevarnos de un lado de una identidad deseada al otro.

Identidades de conjuntos V

- Es útil indicar explícitamente la identidad que se usa en cada paso, como lo hacemos en el Ejemplo 13.

Ejemplo 13 demostración de identidades

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Ejemplo 13 demostración de identidades

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} =$$

Ejemplo 13 demostración de identidades

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$ por la primera ley De Demorgan

Ejemplo 13 demostración de identidades

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{por la primera ley De Demorgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{por la segunda ley De Demorgan}
\end{aligned}$$

Ejemplo 13 demostración de identidades

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{por la primera ley De Demorgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{por la segunda ley De Demorgan} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{por la ley conmutativa para la intersección}
\end{aligned}$$

Ejemplo 13

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{por la primera ley De Demorgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{por la segunda ley De Demorgan} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{por la ley conmutativa para la intersección} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{por la ley conmutativa para la unión}
\end{aligned}$$

□

Resumimos las tres formas diferentes de probar las identidades de conjuntos en la Tabla 3.

Descripción	Método
Método de subconjunto	Muestre que cada lado de la identidad es un subconjunto del otro lado.
Tabla de pertenencia	Para cada combinación posible de los conjuntos atómicos, demuestre que un elemento en exactamente estos conjuntos atómicos debe pertenecer a ambos lados o pertenecer a ninguno.
Aplicar identidades existentes	Comience con un lado, transfórmelo en el otro lado usando una secuencia de pasos aplicando una identidad establecida.

Tabla 3: Métodos para probar identidades de conjuntos.

Ejercicios I

1. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
   1. $A \cup B$.
   2. $A \cap B$.
   3. $A - B$.
   4. $B - A$.
2. Demuestre las siguientes identidades de conjuntos, mostrando que cada lado es un subconjunto del otro y también usando la notación de constructor de conjuntos.
   1. $\overline{\overline{A}} = A$.
   2. $A \cup \emptyset = A$.
   3. $A \cap U = A$.
   4. $A \cup U = U$.
   5. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
   6. $A \cup A = A$.
   7. $A \cap A = A$.
   8. $A \cup \overline{A} = U$.
   9. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
   10. $A - \emptyset = A$.
   11. $\emptyset - A = \emptyset$.
   12. $A \cup B = B \cup A$.
   13. $A \cap B = B \cap A$.
   14. $A \cup (A \cap B) = A$.